Національний університет «Львівська політехніка»

Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій



**ЗВІТ**

**Про виконання лабораторної роботи № 9**

«Наближення функцій методом найменших квадратів»

**з дисципліни «Чисельні методи»**

**Лектор:**

доцент кафедри ПЗ

Мельник Н.Б.

**Виконав:**

студ. групи ПЗ-15

Марущак А. С.

**Прийняв:**

асистент кафедри ПЗ

Гарматій Г.Ю

«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_ 2022 р.

∑ = \_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Львів – 2022

**Тема роботи:** Наближення функцій методом найменших квадратів.

**Мета роботи:** ознайомлення на практиці з методом найменших квадратів апроксимації (наближення) функцій.

**Теоретичні відомості**

На практиці часто виникає необхідність описати у вигляді функціональної залежності зв'язок між величинами, заданими таблично або у вигляді набору точок з координатами , де n – загальна к-ть точок. Як правило, ці табличні дані отримані експериментально і мають похибки.

У результаті апроксимації бажано отримати досить просту функціональну залежність, яка дасть змогу «згладити» експериментальні похибки та обчислити значення функції в проміжних точках, що не містяться у вихідній таблиці.

Розглянемо функцію , задану таблицею своїх значень . Потрібно знайти поліном фіксованого m-го степеня

для якого похибкою апроксимації є середнє квадратичне відхилення

Оскільки поліном містить невизначені коефіцієнти , то необхідно їх підібрати таким чином, щоб мінімізувати функцію

У цьому і полягає суть використання методу найменших квадратів для апроксимації функцій.

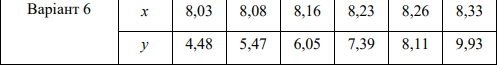
Використовуючи необхідну умову екстремуму функції від багатьох змінних , отримуємо так звану нормальну систему методу найменших квадратів для визначення коефіцієнтів апроксимаційного полінома.

Отримана система - це система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих . Можна показати, що визначник цієї системи відмінний від нуля, тобто її розв’язок існує і єдиний. Однак для високих степенів m система є погано обумовленою. Тому метод найменших квадратів застосовують для знаходження поліномів невисоких степенів m ≤ 5. Розв’язок нормальної системи шукають, використовуючи прямі або наближені методи розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

**Індивідуальне завдання**

1. Ознайомитися з теоретичним матеріалом.
2. Методом найменших квадратів побудувати лінійний, квадратичний і кубічний апроксимаційні поліноми для таблично заданої функції.

**Варіант завдання**



**Хід роботи**

Проведемо деякі обчислення вручну для подальшого використання у програмі.

Наші поліноми будуть мати наступний вигляд:

Використовуючи формулу

запишемо СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів кожного полінома.

Маємо, що n = 5. Cпочатку обчислимо певні додаткові суми:

Тоді, запишемо СЛАР для знаходження невідомих коефіцієнтів для кожного полінома.

Для лінійного полінома СЛАР має наступний вигляд:

Для квадратного - наступний вигляд:

Для кубічного - наступний вигляд:

Все, що лишається – розв'язати подані системи відносно невідомих. Наприклад, для лінійного поліному це . Тоді його можна записати у вигляді . Решту поліномів знайдемо програмно.

Наступна мета – реалізувати подані кроки у вигляді програми, використовуючи отримані знання, для того щоб завершити розрахунки.

Для легшої роботи будемо використовувати структури даних Polynom і Matrix з попередніх лабораторних робіт. Тоді функцію знаходження апроксимаційного поліному запишемо наступним чином:

//Метод для розв'язання СЛАР методом оберненої матриці

private static Matrix SolveInversedMatrix(Matrix A, Matrix B) => A.Inversed() \* B;

//Метод для пошуку апроксимаційного поліному фіксованого степеня

public static Polynom GetAproximated(IEnumerable<KeyValuePair<decimal, decimal>> xypairs, int polynomPower)

{

//Масив сум x-ів певного степеня

decimal[] powerSums = new decimal[polynomPower \* 2 + 1];

for (int i = 0; i < polynomPower \* 2 + 1; i++)

{

//Шукаємо ці суми

powerSums[i] = xypairs.Select(pair => pair.Key).Sum(x => Convert.ToDecimal(Math.Pow(Convert.ToDouble(x), i)));

}

Matrix A = new(polynomPower + 1, polynomPower + 1), B = new(polynomPower + 1, 1);

for (int i = 0; i < polynomPower + 1; i++)

{

for (int j = 0; j < polynomPower + 1; j++)

{

//a\_ij = sum (x\_i^(i+j))

A[i, j] = powerSums[i + j];

}

//b\_i = sum(y\_i \* x\_i^m)

B[i, 0] = xypairs.Select(pair => pair.Value \* Convert.ToDecimal(Math.Pow(Convert.ToDouble(pair.Key), i))).Sum();

}

return new Polynom(SolveInversedMatrix(A, B).ToArray());

}

Подамо точки з варіанту завдання на вхід програми і подивимось на результат.

**Результат** виконання програми:

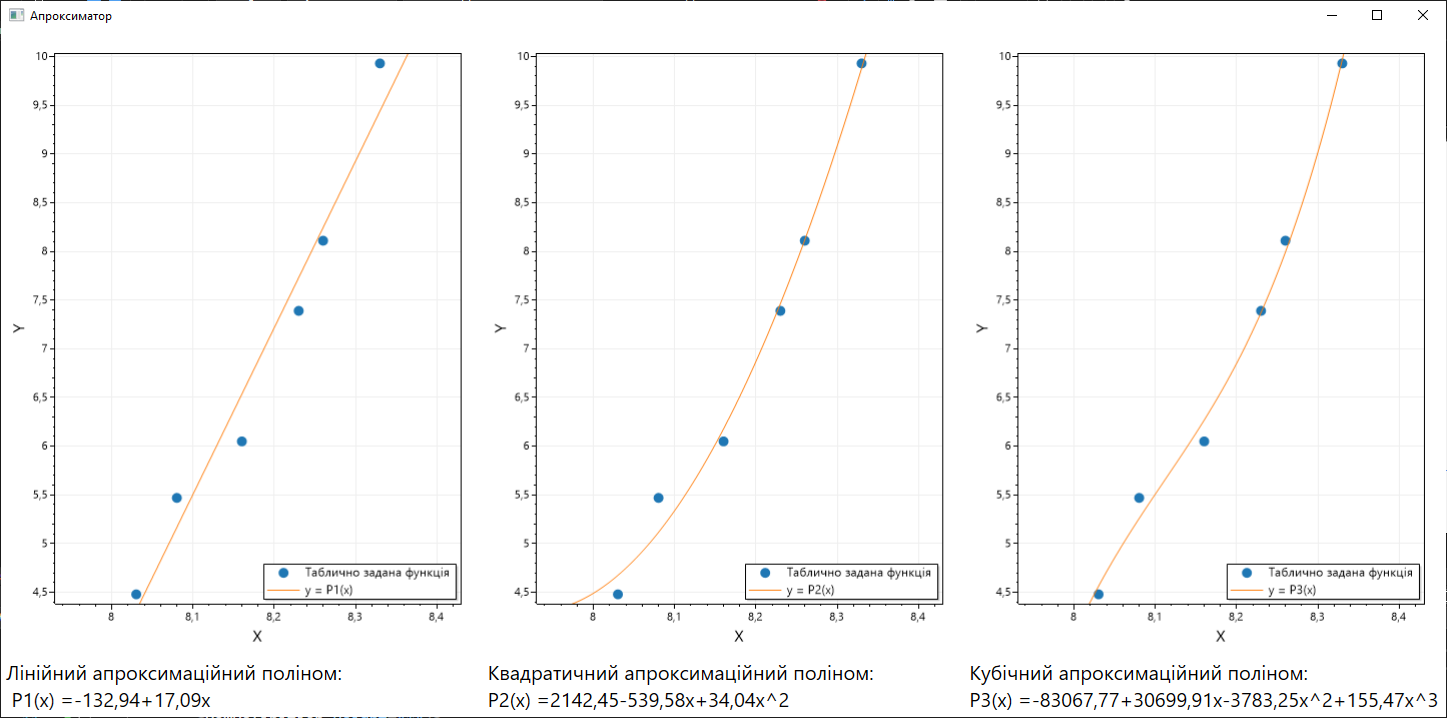


Рис 1.1 Результат виконання програми.

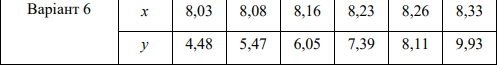
**Аналіз результатів:**

Як бачимо, усі 3 поліноми досить чітко проходять через задану множину точок. Це означає, що завдання з високою ймовірністю було виконано правильно.

**Висновок:**

Виконуючи цю лабораторну роботу, ми ознайомилися з методом найменших квадратів апроксимації (наближення) функцій.

За допомогою цих знань ми реалізували програму, що змогли наблизити таблично задану функцію



використовуючи лінійний, квадратичний та кубічний поліноми.

Ми отримали наступні поліноми:

та побудували їх графіки, використовуючи які, пересвідчились, що ці поліноми досить точно наближають задану множину точок.